1. Distribución de probabilidad geométrica.

Esta distribución es parecida a la binomial, sin embargo con esta se quiere saber cuantas veces se debe realizar el ensayo hasta alcanzar el primer éxito.

<u>Definición</u>: Una variable aleatoria Y tiene una distribución de probabilidad geométrica si y solo si

$$p(y) = q^{y-1}p$$

con $y = 1, 2, 3, ...$ y $0 \leq p \leq 1$.

<u>Teorema</u>: Si Y es una variable aleatoria con distribución geométrica, entonces $\mu = E[Y] = \frac{1}{p}$ y $\sigma^2 = V(Y) = \frac{1-p}{p^2}$.

<u>Ejemplo</u>. Un contador halla que en 9 de 10 auditorias se cometieron errores de importancia. Si, en consecuencia, revisa una serie de compañias. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) la primera cuenta con errores serios sea la tercera revisada?
b) la primera cuenta con errores serios se encuentre en la tercera revisada o después de esta?
c) ¿Cuál es la media y la desviación estándar del número de cuentas que deben revisarse para encontrar la primera con errores considerables?

<u>Solución</u>.
De los datos podemos sacar que $p = \frac{9}{10}$ y $q = \frac{1}{10}$. Luego:

a)

$$P(Y = 3) = \frac{1}{10}^{2} \frac{9}{10} = 0{,}009.$$

b)

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - P(Y = 1) - P(Y = 2) = 1 - \frac{9}{10} - \frac{1}{10}\frac{9}{10} = 0{,}01.$$

c)

$$\mu = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}.$$

$$\sigma^2 = \frac{1 - \frac{9}{10}}{\left(\frac{9}{10}\right)^2} = \frac{10}{81} \Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{10}}{9}.$$

<u>Ejemplo</u>. Si consideramos a y_0 como el valor de una variable aleatoria geométrica Y, demuestre que $P(Y = y_0)$ alcanza su máximo cuando $p = \frac{1}{y_0}$. Estamos determinando el valor de p que maximiza la probabilidad del valor de Y que en realidad observamos.

<u>Solución</u>.
Dado que Y es geométrica podemos asegurar que

$$P(Y=y_0)=q^{y_0-1}p=(1-p)^{y_0-1}p \Rightarrow ln[P(Y=y_0)]=(y_0-1)ln(1-p)+ln(p).$$

Como queremos maximizar, derivamos el logaritmo de la función y buscamos su punto crítico (igualando a cero).

$$\frac{d[ln(P)]}{dp}=-\frac{y_0-1}{1-p}+\frac{1}{p}=0 \Rightarrow p=\frac{1}{y_0}.$$

Se se utiliza el criterio de la segunda derivada es fácil ver que efectivamente es un máximo.